II CONPESQ
Congresso de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação
Os novos rumos da ciência pós-pandemia
12 a 16 de abril de 2021 Universidade Federal do Cariri - UFCA

DECOMPOSIÇÃO MÍNIMA EM CAMINHOS DE CACTOS

Francisca Gardênia Silva Estevam
Informar filiação, e-mail e financiamento
obrigatoriamente nos metadados

Thiago Braga Marcilon
Informar filiação, e-mail e financiamento
obrigatoriamente nos metadados

RESUMO: Uma decomposição em caminhos de um grafo G é um conjunto de caminhos no qual cada aresta de G pertence a exatamente um dos caminhos. Em 1966, Gallai conjecturou que em um grafo G que possui n vértices, o número mínimo de caminhos necessários para decompor G, ρ, possui um limite superior, dado por $\rho n(G) \leq n + 1/2$. Peroche provou que ainda que o grau máximo de um grafo G seja 4 é NP-completo decidir se G possui uma decomposição mínima de tamanho de um inteiro k. Neste trabalho, é demonstrado que encontrar uma decomposição mínima em caminhos de um cacto pode ser feito em tempo polinomial.

Deve conter uma introdução ao tema, o objetivo do trabalho, os procedimentos metodológicos, os resultados e as considerações finais.

PALAVRAS-CHAVE: Grafos. Decomposição em caminhos. Cactos.

ABSTRACT: A path decomposition of a graph G is a path set where each edge in G belongs to exactly one of the paths. In 1966, Gallai conjectured that in a graph G with n vertices, the minimal required number of paths to decompose G, ρ, has a upper bound, given by $\rho n(G) \leq n + 1/2$. Peroche showed that even if the maximum degree of a graph G is 4, it is NP-complete to decide whether G has a minimal decomposition of size k, where k is an integer. In this paper, it is proved that the running time of finding a minimal path decomposition of a cactus graph type is polynomial.

It must contain an introduction to the theme, the objective of the work, the methodological procedures, the results and the final considerations.

Keywords: Graphs. Path decompositions. Cactus

1 INTRODUÇÃO

Vários problemas sobre decomposição de grafos foram estudados no decorrer da história. Como por exemplo a conjectura de Gallai(1966), que dá um limite superior para *ρn(G)*, onde, se G é um grafo conexo de n vértices, então *ρn(G)* $\leq n + 1 / 2$. Tal conjectura foi estudada em diversos trabalhos. Como por exemplo, Lovász (1968) provou que a conjectura de Gallai vale para todos os grafos ímpares regulares. Dean (2000) provou que *ρn(G)* $\leq 1/2\, o \;+\; CHÃO\; 2/3\, g$, onde g é o número de vértices pares não isolados. E muitos outros como Botler (2017), Donald (1980), Fan (2005) e Pyber (1996).

Jacobson (1991) estudou sobre decomposição de grafos bipartidos, onde ele investiga a decomposição de um grafo bipartido *r*-regular em uma árvore de tamanho *r* implicando que um grafo bipartido 4-regular pode ser decomposto em caminhos de tamanho 4.

Quanto a trabalhos na área de algoritmos para decomposição em caminhos mínimos, Botler (2019) desenvolveu um modelo de Programação Linear Inteira para calcular *ρn(G)*, que verifica a conjectura de Gallai em um grande número de grafos. Já Péroche (1984) provou que tendo *G*, um grafo, e *k*, inteiro, como entradas, o problema de decisão *ρn(G)* ≤ *k*, é NP-completo, mesmo que o grau máximo de *G* seja 4. Porém Constantinou e Ellinas (2018) provaram que para algumas famílias de grafos bipartidos, determinar *ρn(G)* é polinomial. Não obstante, nada se sabe sobre encontrar *ρn(G)* quando *G* é um cacto, por isso, estuda-se neste trabalho o problema de decisão de decomposição em caminhos de cactos a seguir

Problema de Decomposição de Cactos.
Entrada: Uma cacto *G* e um inteiro *k*.
Questão: G possui uma decomposição em caminhos de tamanho menor ou igual a *k*?

Na Seção Apresentação e Discussão de Resultado, é demonstrado um teorema que diz que se *G* é um cacto, que não é um ciclo, e *o* o número de vértices ímpares de G, *ρn(G)* = *o/2* + *x*, onde *x* é o número de ciclos contendo no máximo um vértice de grau pelo menos 3. Note que a partir disso é possível dizer que o Problema 1 é polinomial, visto que encontrar *o* e *x* pode ser feito em tempo polinomial.

E por fim, na mesma seção, um algoritmo para determinar uma decomposição mínima em caminhos de cactos que tem complexidade polinomial é apresentado.

2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Vulputate mi sit amet mauris commodo. Nunc lobortis mattis aliquam faucibus purus in massa tempor. Nunc id cursus metus aliquam eleifend mi. Est placerat in egestas erat imperdiet sed. Aliquam ut porttitor leo a diam sollicitudin. Turpis massa tincidunt dui ut ornare lectus sit. Parturient montes nascetur ridiculus mus mauris vitae ultricies. A condimentum vitae sapien pellentesque habitant morbi. Dictumst quisque sagittis purus sit amet volutpat consequat. Pharetra magna ac placerat vestibulum. Velit scelerisque in dictum non. Lacus viverra vitae congue eu consequat ac felis. Nibh cras pulvinar mattis nunc sed. Viverra tellus in hac habitasse platea dictumst vestibulum rhoncus. Euismod quis viverra nibh cras pulvinar. Pretium lectus quam id leo in.

Varius morbi enim nunc faucibus. Id diam maecenas ultricies mi eget mauris. Ipsum nunc aliquet bibendum enim facilisis. Praesent tristique magna sit amet purus gravida quis blandit turpis. Tristique nulla aliquet enim tortor at auctor urna nunc. Nulla at volutpat diam ut venenatis tellus in. Ullamcorper eget nulla facilisi etiam dignissim diam quis enim lobortis. Euismod quis viverra nibh cras. Et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Facilisi morbi tempus iaculis urna id volutpat. Turpis nunc eget lorem dolor. Enim sit amet venenatis urna cursus eget nunc scelerisque viverra. Quam vulputate dignissim suspendisse in est ante in nibh mauris.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Vulputate mi sit amet mauris commodo. Nunc lobortis mattis aliquam faucibus purus in massa tempor. Nunc id cursus metus aliquam eleifend mi. Est placerat in egestas erat imperdiet sed. Aliquam ut porttitor leo a diam sollicitudin. Turpis massa tincidunt dui ut ornare lectus sit. Parturient montes nascetur ridiculus mus mauris vitae ultricies. A condimentum vitae sapien pellentesque habitant morbi. Dictumst quisque sagittis purus sit amet volutpat consequat. Pharetra magna ac placerat vestibulum. Velit scelerisque in dictum non. Lacus viverra vitae congue eu consequat ac felis. Nibh cras pulvinar mattis nunc sed. Viverra tellus in hac habitasse platea dictumst vestibulum rhoncus. Euismod quis viverra nibh cras pulvinar. Pretium lectus quam id leo in.

Varius morbi enim nunc faucibus. Id diam maecenas ultricies mi eget mauris. Ipsum nunc aliquet bibendum enim facilisis. Praesent tristique magna sit amet purus gravida quis blandit turpis. Tristique nulla aliquet enim tortor at auctor urna nunc. Nulla at volutpat diam ut venenatis tellus in. Ullamcorper eget nulla facilisi etiam dignissim diam quis enim lobortis. Euismod quis viverra nibh cras. Et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Facilisi morbi tempus iaculis urna id volutpat. Turpis nunc eget lorem dolor. Enim sit amet venenatis urna cursus eget nunc scelerisque viverra. Quam vulputate dignissim suspendisse in est ante in nibh mauris.

4 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DE RESULTADOS

Sejam considerados como ciclos do tipo *A* os ciclos em que no máximo um vértice que os compõem possui grau pelo menos 3 e sejam os demais ciclos chamados de ciclos do tipo *B*.

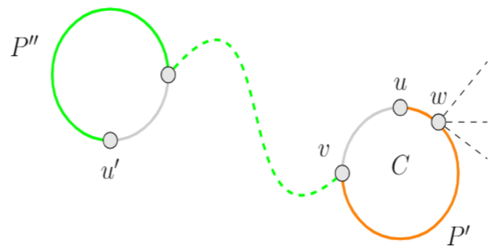
Lema 1: Se *G* é um cacto, porém não um ciclo, ou existe um vértice de grau um ou existe um ciclo do tipo *A* em *G*.

Demonstração: Seja *G* um cacto, porém não um ciclo. Suponha, por absurdo, que *G* não possui vértices de grau um ou ciclos do tipo *A*. Defina Σ como sendo o conjunto de todos os caminhos que passam pela quantidade máxima de ciclos distintos em *G*. Seja *P* o maior caminho em Σ e sejam *u* e *u'* as suas extremidades.

Como *u* possui grau maior que um, seja *v* um dos seus vizinhos em *G* que não é seu vizinho em *P*. Tem-se que *v* está em *P*, pois, caso contrário, poderia-se estender *P*, obtendo um caminho maior do que *P* que também está em Σ, o que é um absurdo.

Sejam *P'* e *P''* os subcaminhos de *P* com extremidades em *u* e *v* e em *u'* e *v* respectivamente, e seja *C* o ciclo definido por *P'* adicionando a aresta *uv*. Como *C* é do tipo *B*, tem-se um vértice *w* em *P'* com grau pelo menos três. Observe o grafo *G* na Figura 1 abaixo.

Figura 1 - Representação do grafo *G*, onde o caminho *P* é a união dos caminhos *P'* e *P''*



Fonte: Produção do Próprio Autor

Como G é um cacto, w é um vértice de corte. Sendo assim, seja H o subgrafo de G composto pela componente conexa de G-w que não contém P juntamente com as arestas entre essa componente conexa e w.

Temos que H não possui um ciclo, pois, se possuísse, teríamos que o caminho $R = P'' \sim w \sim q$, onde q é um vértice do ciclo em H de modo que R passa por pelo menos uma de suas arestas, passaria por mais ciclos do que P, o que é um absurdo já que $P \in \Sigma$. Sendo assim, H é uma árvore, e, sendo assim, possui pelo menos um vértice de grau um, o que também é um absurdo, pois, assim, G possuiria um vértice de grau um.

Portanto, conclui-se que deve existir em G ou um vértice de grau um ou um ciclo do tipo A.

■

Teorema 1: Seja G um cacto, que não é um ciclo, e o o número de vértices ímpares de G, $\rho n(G) = o/2 + x$, onde x é o número de ciclos contendo no máximo um vértice de grau pelo menos 3.

Demonstração: A prova é feita por indução no número de arestas.

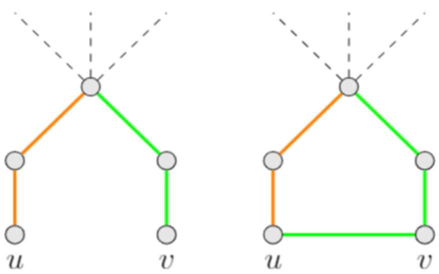
Caso Base: O cacto G é formado por dois vértices e uma aresta. O número x é 0 e o é 2. Assim, $\rho n(G) = 2/2 + 0 = 1$.

Passo Indutivo: Aqui a Hipótese Indutiva é que a afirmação é verdadeira para cactos que não são somente um ciclo e possuem um número n de arestas maior que um, até $n - 1$ arestas. Seja G um grafo qualquer do tipo cacto que contém n arestas, x a quantidade de ciclos contendo no máximo um vértice de grau pelo menos 3 e o o número de de vértices com grau ímpar. Se uma de suas arestas for retirada, um novo grafo G' com x' e o' é obtido. A partir daí, é provado que $\rho n(G) = o/2 + x$.

Quando uma aresta do grafo G é retirada, deve-se atentar a qual aresta será removida. Uma ordem de prioridade deve ser seguida, se o grafo G tiver um ciclo do tipo A, então deverá ser retirada uma aresta do ciclo que está entre dois vértices de grau 2. Se não tiver, uma aresta de um dos vértices de grau um. De acordo com o Lema 1, tais arestas sempre existirão. Cada caso é discutido a seguir.

1º Caso: Uma aresta entre vértices de grau 2 será retirada: Então o ciclo no qual ele pertencia deixa de ser ciclo. Desse modo G' possui n - 1 arestas e não pode ser somente um ciclo, já que um ciclo de G foi desfeito para originá-lo, então a Hipótese Indutiva vale para G' e $\rho n(G') = o'/2 + x'$. Os vértices da aresta retirada passam a ter grau ímpar e em G são extremidades de caminhos na decomposição de G', e sejam u e v um dos vértices. No momento que a aresta é recolocada, os dois vértices passam a ter grau par e $o = o' - 2$, um ciclo do tipo A é formado e $x = x' + 1$. Dessa forma o caminho que v era extremidade é estendido até u e a aresta que foi adicionada faz parte de um caminho na decomposição, conforme ilustrado na Figura 2. Não foi removido nem acrescentado caminhos à decomposição de G', então $\rho n(G) = \rho n(G') = o'/2 + x' = (o - 2)/2 + x + 1 = o/2 + x - 1 + 1 = o/2 + x$.

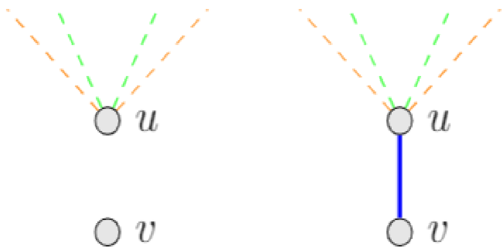
Figura 2 - Recolocando a aresta entre vértices de grau 2



Fonte: Produção do Próprio Autor

2º Caso: Uma aresta de vértice de grau um será retirada. Nesse caso, existem três possibilidades: nenhum de seus vértices estão em ciclos, um de seus vértices está em um ciclo do tipo B que quando a aresta é retirada se mantém do tipo B ou um de seus vértices está em um ciclo do tipo B mas quando a aresta é retirada passa a ser do tipo A. Sejam u e v os vértices que compõem a aresta retirada, onde v é o vértice de grau um. Primeiramente, sejam considerados que os vértices não estão em nenhum ciclo, desse modo o número x não vai ser alterado, ou seja $x' = x$, e G' é um cacto que não é um ciclo, já que G também não é, e como G' possui n - 1 arestas, a Hipótese Indutiva vale para G' e $\rho n(G') = o'/2 + x'$. Se em G', u tinha grau par, significa que ele era vértice interno de no mínimo um caminho. Ao recolocar a aresta, em *G*, *u* e *v* terão grau ímpar, logo devem ser extremidades de um caminho, que é justamente o caminho que contém somente os dois vértices. A Figura 3 mostra como deve ser feito. Na decomposição de *G*, não são adicionados caminhos a mais à decomposição de *G'*, assim $\rho n(G) = \rho n(G') + 1 = o'/2 + x' + 1 = (o - 2)/2 + x + 1 = o/2 + x + 1 - 1 = o/2 + x$.

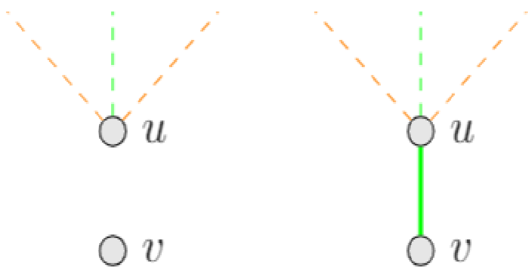
Figura 3 - Recolocando a aresta entre vértices de grau 2



Fonte: Produção do Próprio Autor

Mas se *u* tinha grau ímpar em *G'*, na decomposição ele é extremidade de um caminho. E quando a aresta é recolocada, em *G*, *u* passa a ter grau par, *v* tem grau ímpar e por isso deve ser extremidade de algum caminho. Na decomposição de *G*, basta estender o caminho que em *G'* terminava em *u* para em *G* terminar em *v*, como a Figura 4 mostra. E nenhum caminho foi adicionado à decomposição de *G'*, assim $\rho n(G) = \rho n(G') = o'/2 + x' = o/2 + x$.

Figura 4 - Recolocando a aresta entre vértices de grau 2

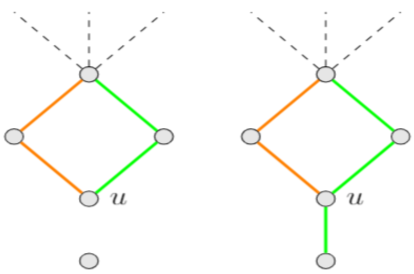


Fonte: Produção do Próprio Autor

Agora, tem-se o caso em que *u* pertence a algum ciclo. Desse modo, primeiramente, seja considerado que a aresta retirada pertence a um ciclo do tipo *B* que em *G'* continua sendo do tipo *B*. Aqui, *G'* possui $n - 1$ arestas e também não pode ser somente um ciclo, já que ele possui pelo menos um ciclo do tipo *B* em sua estrutura, desse modo, a Hipótese Indutiva vale para *G'* e $\rho n(G') = o'/2 + x'$. Este caso é análogo à situação anterior, onde deve-se analisar a paridade do vértice u. Quando u é par em G', será ímpar em G, devendo ser extremidade de um caminho que é justamente o caminho contendo a aresta uv. Quando u é ímpar em G', é par em G e deve-se estender o caminho no qual ele era extremidade, de forma que a nova extremidade é o vértice v.

Suponha que a aresta retirada é de um ciclo do tipo B em G que passa a ser do tipo A em G'. Quando isso acontece, o grafo G' é um cacto que não é um ciclo porque ele possui pelo menos um ciclo do A em sua composição, como ele também tem $n - 1$ arestas a Hipótese Indutiva vale para G' e $\rho n(G') = o'/2 + x'$. Seja o vértice u o vértice cuja aresta foi retirada e que faça parte do ciclo. Na decomposição de G', como u faz parte de um ciclo do tipo A ele é decomposto de forma que um vértice par é extremidade de dois caminhos e seja u esse vértice, já que o ciclo é coberto pela decomposição, não faz diferença qual vértice par do ciclo será extremidade dos caminhos. Depois de recolocar a aresta que foi retirada, $x = x' - 1$, porque o ciclo passa a ser do tipo A, u passa a ter grau ímpar, e o outro vértice da aresta também, logo $o = o' + 2$. Como agora u tem grau ímpar, ele deve ser extremidade de um caminho, então ele continua sendo extremidade de um dos caminhos que ele era em G' e o outro deve ser estendido até o outro vértice que possui grau ímpar. E $\rho n(G) = \rho n(G') = o'/2 + x' = (o + 2)/2 + x - 1 = o/2 + x + 1 - 1 = o/2 + x$. A decomposição de G' pode ser observada na Figura 5.

Figura 5 - Exemplo de decomposição de um grafo G a partir de um G′



Fonte: Produção do Próprio Autor

Lema 2: Encontrar a decomposição mínima de um cacto pode ser feito em tempo polinomial.

Demonstração: Como consequência direta da prova por indução do Teorema 1, o Algoritmo 1, o qual é um algoritmo recursivo que encontra a decomposição mínima de um cacto G, pode ser derivado.

Como cada uma das linhas pode ser executada em tempo $O(|E|)$, onde E é o conjunto de arestas do grafo de entrada, e são feitas $O(|E|)$ chamadas recursivas, concluí-se que o algoritmo tem complexidade $O(|E|^2)$.

Algoritmo 1: Decomposição

Entrada: Grafo *G = (V, E)*

Saída: Decomposição mínima em caminhos de *G*

```
se |E| = uv então:
    retorna {uv};
se existe um ciclo do tipo A em G então:
    seja uv uma aresta desse ciclo de G e G' = G - uv;
    D = Decomposição(G');
    seja P o caminho em D tal que v é sua extremidade;
    P' = P,u;
    retorna (D \ {P}) U  ({P'});
senão:
    seja uv a aresta que o vértice de v de grau 1 faz parte em G e G' = G -uv
    D = Decomposição(G');
    se uv não pertence a nenhum ciclo ou uv pertence a algum ciclo que em G era
    do tipo B e em G' continuou do tipo B então:
        se u tem grau par em G então:
            seja P o caminho formado pela aresta uv;
            retorna (D U {P});
        se u tem grau ímpar em G então:
            seja P o caminho em D tal que u é sua extremidade;
            P' = P,v;
            retorna (D \ {P} U {P'}));
    se a aresta pertence a algum ciclo que em G era do tipo B e em G' é do tipo A
    então:
        se u não é extremidade de nenhum caminho em D então:
```

modificar os caminhos que decompõem o ciclo que *u* faz parte para que *u* seja extremidade;

seja *P* um dos caminhos em *D* tal que *u* é sua extremidade

$P' = P, v$

retorna $(D \setminus \{P\})\ U\ (\{P'\})$;

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi estudado o problema de determinar uma decomposição mínima em caminhos de cactos. Primeiramente, foi provado o Teorema 1, que diz que se $pn(G) = o/2 + k$. Um dos produtos do Teorema 1 é o Algoritmo 1, um algoritmo polinomial para achar uma decomposição mínima em caminhos de cactos. Alguns problemas relacionados ao problema trabalhado aqui continuam em aberto, como o problema de decomposição mínima em grafos bloco e em grafos planares.

REFERÊNCIAS

BOTLER, Fábio; JIMÉNEZ, Andrea; On path decompositions of 2k-regular graphs. **Discrete Mathematics,** v.340, n.6, p.105-1411. set. 2017. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0012365X1630317X Acesso em: 9 fev. 2021.

BOTLER, Fábio, CANO, R., SAMBINELLI Maycon. On Computing the Path Number of a Graph. **Electronic Notes in Theoretical Computer Science,** v.346, n.1, p.185-197, 2019. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1571066119300672. Acesso em 9 fev. 2021.

CONSTANTINOU, Costas K.; ELLINAS, Georgios. Minimal path decomposition of complete bipartite graphs. **Journal of Combinatorial Optimization,** v. 35, n.3, p.684-702. 2018. Disponível em: https://econpapers.repec.org/article/sprjcomop/v_3a35_3ay_3a2018_3ai_3a3_3ad_3a10.1007_5fs10878-017-0200-7.htm Acesso em 9 fev. 2021

DEAN, Nathaniel; KOUIDER, Mekkia; Gallai's conjecture for disconnected graphs. **Discrete Mathematics,** v. 213, n. 1-3, p. 43-54, fev./mai 2000. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X99001673 Acesso em: 9 fev. 2021.

DONALD, Alan. An upper bound for the number of a graph. **Journal of graph theory,** Ontário, v. 4, n. 2. p. 189-201, jul./set. 1980. Disponível em: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/jgt.3190040207 Acesso em 9 fev. 2021.

GENGHUA, Fan. Path decompositions and Gallai's conjecture. **Journal of Combinatorial Theory,** v. 993, n. 2, p.117-125. nov. 2005. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0095895604000875 Acesso em 9 fev. 2021.

JACOBSON, Michael S., TRUSZCZYŃSKI, Miroslaw, TUZA, Zsolt. Decompositions of regular bipartite graphs. **Discrete mathematics,** Holanda do Norte, v.89, n.1, p.17-27, 1991. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0012365X9190396J Acesso em 9 fev. 2021.

LOVÁSZ, László. On covering of graphs, *In:* ERDÖS, P. *et al.* (ed.). **Theory of Graphs,** Hungary, 1966, 231p.

PÉROCHE, B. NP-completeness of some problems of partitioning and covering in graphs. **Discrete applied mathematics,** Holanda do Norte, v.8, n.2, p.195-208, 1984. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0166218X8490101X. Acesso em 9 fev. 2021.

PYBER, László. Covering the edges of a connected graph by paths. **Journal of combinatorial theory,** Budapeste, v. 66, n. 1, p.152-159, 1966. Disponível em: https://core.ac.uk/download/pdf/82752958.pdf Acesso em 9 fev. 2021.